5/12/2016

Σύνδεση συνέχειας και ορίου

$f: A \to \mathbb{R}$ $x_0 \in A$ η f συνεχής στο x_0

$\overset{\text{ορ}}{\Longleftrightarrow}$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$

$\forall x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$f: A \to \mathbb{R}$ x_0 σημείο συσσώρευσης του A

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$

$\forall x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ ισχύει $|f(x) - l| < \varepsilon$

<u>Πρόταση</u>

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$ μεμονωμένο σημείο

Τότε η f είναι συνεχής στο x_0

<u>Απόδειξη</u>

Εφόσον το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του A

υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x_0\}$

Έστω $\varepsilon > 0$ Τότε για το δ που ορίσαμε παραπάνω

Έχουμε ότι αν $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ τότε $x = x_0$

Άρα $|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$ Άρα η f είναι συνεχής

στο x_0

Πρόταση
Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$ σημείο συσσώρευσης του A

Τότε η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν
$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Απόδειξη

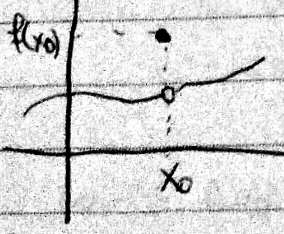
($\Rightarrow$) Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον η f είναι συνεχής στο x_0
$\exists \delta > 0$ ώστε $\forall x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει
$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
Άρα για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ ισχύει
$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ Άρα $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

($\Leftarrow$) Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
$\exists \delta > 0$ ώστε $\forall x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ να
ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Εφόσον για $x = x_0$ η σχέση $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ισχύει
προκύπτει ότι για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ ισχύει
$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Άρα η f είναι συνεχής στο x_0

Έστω $f: I \to \mathbb{R}$ x_0 εσωτερικό σημείο του διαστήματος I
Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0
υπάρχουν τρεις περιπτώσεις

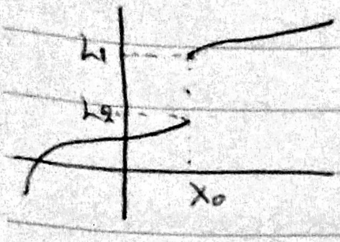
(1) Υπάρχει το όριο $\lim_{x \to x_0} f(x)$ στο $\mathbb{R}$ αλλά δεν είναι ίσο
με $f(x_0)$



Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η f έχει
<u>επουσιώδη ασυνέχεια</u> στο x_0 (ή άρσιμη
ασυνέχεια στο x_0)

(2) Υπάρχουν τα δυο πλευρικά όρια της f στο x_0 και είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_1$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_2$ με $L_1 \neq L_2$



Λέμε ότι η f παρουσιάζει άλμα στο σημείο x_0 (μεγέθους $L_1 - L_2$)

(3) Ένα τουλάχιστον από τα δυο πλευρικά όρια της f στο σημείο x_0 δεν υπάρχει. Σε αυτή τη περίπτωση λέμε ότι η f παρουσιάζει ουσιώδη ασυνέχεια στο σημείο x_0

<u>Πρόταση</u>. Έστω $a>0$ και $n \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει (μοναδικό) $\xi > 0$ ώστε $\xi^n = a$.
(Υπαρξη n-οστής ρίζας)

<u>Απόδειξη</u>

Υπάρχει $b>0$ ώστε $b^n > a$

(Αν $a<1$ επιλέγω $b=1$
αν $a=1$ -״- $b=2$
αν $a>1$ -״- $b=a$)

Ορίζουμε $f[0,b] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^n - a$
f συνεχής
$f(0) = -a < 0$
$f(b) = b^n - a > 0$

Από το Θεωρ. Bolzano $\exists\, \xi \in (0,b)$ $f(\xi)=0$ δηλ. $\xi^n = a$

Θεώρημα

Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού (με πραγματικούς συντελεστές) έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$

Απ.

Έστω $P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + a_1 x + a_0$

όπου ν περιττός και $a_\nu \neq 0$

Για $x \neq 0$

$$P(x) = a_\nu x^\nu \underbrace{\left(1 + \frac{a_{\nu-1}}{a_\nu}\frac{1}{x} + \frac{a_{\nu-2}}{a_\nu}\cdot\frac{1}{x^2} + \dots + \frac{a_1}{a_\nu}\cdot\frac{1}{x^{\nu-1}} + \frac{a_0}{a_\nu}\frac{1}{x^\nu}\right)}_{f(x)\ (\text{ορίζεται για } x\neq 0)}$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \exists M > 0$ ώστε για $x > M$ $f(x) \geq \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \exists N > 0$ ώστε για $x < -N$ $f(x) > 1/2$

$$P(M)\cdot P(-N) = \underbrace{a_\nu \cdot M^\nu}_{} \underbrace{f(M)}_{>0} \cdot \underbrace{a_\nu (-N)^\nu}_{} \underbrace{f(-N)}_{>0} < 0$$

$M^\nu > 0$, $(-N)^\nu < 0$

$a_\nu^2 > 0$

Από Θ. Bolzano στο $[-N, M]$

η P είναι συνεχής ως πολυώνυμο

$\exists \xi \in (-N, M)$ $P(\xi) = 0$

Άσκηση

Έστω $a < b$

Να δ.ο. η εξίσωση

$$\frac{x^4+1}{x-a} + \frac{2x^2+5}{x-b} = 0$$

Έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (a, b)

Θέτουμε
$f(x) = (x^4+1)(x-b) + (2x^2+5)(x-a)$
η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική

$f(a) = (a^4+1)(a-b) < 0$
$f(b) = (2b^2+5)(b-a) > 0$

Από Θ. Bolzano $\exists \xi \in (a,b)$ $f(\xi) = 0$
Ο αριθμός ξ είναι ρίζα της αρχικής εξίσωσης

<u>Άσκηση</u>
Έστω $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις
ώστε $f(x) = g(x)$ $\forall x \in \mathbb{Q}$
Να δο. $f(x) = g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

<u>Αποδ</u>
Έστω $x \in \mathbb{R}$. Επιλέγουμε μια ακολουθία ρητών αριθμών
$(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ώστε $q_n \to x$

Εφόσον η f είναι συνεχής (στο x) προκύπτει ότι
$f(q_n) \to f(x)$ (1)
Εφόσον η g είναι συνεχής (στο x)
$g(q_n) \to g(x)$ (2)

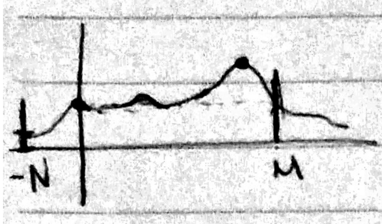
Εφόσον $f(q_n) = g(q_n)$ $\forall n$

(2) $\Rightarrow$ $f(q_n) \to g(x)$ (3)
Από μοναδικότητα ορίου ακολουθίας (1),(3) $\Rightarrow f(x) = g(x)$

Ασκηση

Εστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x)>0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ συνεχης
και $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

Να δειχθει οτι η f λαμβανει μεγιστη τιμή



$f(0)>0$
Εφοσον $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

υπαρχει $M>0$ ωστε για καθε $x>M$ $-f(0)<f(x)<f(0)$
(χρησιμοποιωντας τον ορισμο του οριου για $\varepsilon=f(0)$)

και Εφοσον $f(x)>0$ $\forall x$ $\quad 0<f(x)<f(0)$ $\forall x>M$

Ομοιως, εφοσον $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ και $f(x)>0$ $\forall x$
υπαρχει $N>0$ ωστε για $x<-N$ $\quad 0<f(x)<f(0)$

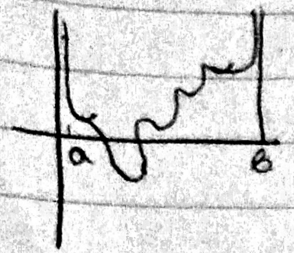
Η συνεχης συναρτηση f παιρνει μεγιστη τιμή στο κλειστο διαστημα $[-N,M]$
δηλ. $\exists\, x_0 \in [-N,M]$
ωστε $f(x) \le f(x_0)$ $\quad \forall x \in [-N,M]$

Παρατηρουμε οτι για $x>M$
$$f(x) < f(0) \le f(x_0)$$
και για $x<-N$
$$f(x) < f(0) \le f(x_0)$$
Επομενως
$f(x) \le f(x_0)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ δηλ. η f λαμβανει μεγιστη τιμη στο x_0

Ασκηση

Εστω $f:(a,\beta)\to\mathbb{R}$ συνεχής με $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ και $\lim_{x\to \beta^-} f(x)=+\infty$

Να δ.ο. η f αναλαμβανει ελαχιστη τιμη.



Επιλεγουμε τυχαίο $y\in(a,\beta)$

Εφόσον $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

υπάρχει $\varepsilon_1>0$ ωστε για καθε x με $a<x<a+\varepsilon_1$ να ισχυει $f(x)>f(y)$

Εφοσον $\lim_{x\to \beta^-} f(x)=+\infty$ υπάρχει $\varepsilon_2>0$ για κάθε x με $\beta-\varepsilon_2<x<\beta$ να ισχυει $f(x)>f(y)$

Παρατηρουμε οτι $a+\varepsilon_1\le y\le \beta-\varepsilon_2$

Αν $a+\varepsilon_1=\beta-\varepsilon_2$ (τοτε $=y$) και η f λαμβάνει ελάχιστη τιμή στο y

Αν $a+\varepsilon_1<\beta-\varepsilon_2$

Στο κλειστο διαστημα $[a+\varepsilon_1,\beta-\varepsilon_2]$ η συνεχής συναρτηση f λαμβάνει ελάχιστη τιμή

Αρα $\exists x_0\in[a+\varepsilon_1,\beta-\varepsilon_2]$

ώστε $f(x)\ge f(x_0)$ $\forall x\in[a+\varepsilon_1,\beta-\varepsilon_2]$

Για $x<a+\varepsilon_1$

$f(x)>f(y)\ge f(x_0)$

Για $x>\beta-\varepsilon_2$ $f(x)>f(y)\ge f(x_0)$

Επομένως $f(x)\ge f(x_0)$ $\forall x\in(a,\beta)$

4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, a ένα σημείο συσσώρευσης του A και $\ell \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:
(i) $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$. (ii) $\lim_{x\to a} \big(f(x) - \ell\big) = 0$. (iii) $\lim_{x\to a} |f(x) - \ell| = 0$.
[Υπόδειξη: Άμεση εφαρμογή του ορισμού.]

2. Να δείξετε ότι οι εκφράσεις $\lim_{x\to a} f(x)$ και $\lim_{h\to 0} f(a+h)$ είναι ισοδύναμες (υπό την έννοια ότι αν το ένα από τα δύο όρια υπάρχει, τότε υπάρχει και το άλλο και είναι ίσα μεταξύ τους).

3. Χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 3x + 7$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 6$.

4. Δείξτε, με χρήση αποκλειστικά του ορισμού, ότι $\lim_{x\to+\infty} \frac{6}{\sqrt[8]{x}} = 0$.

5. Έστω $a \geq 0$. Δείξτε, χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό, ότι $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.
[Υπόδειξη: Να εξετάσετε ξεχωριστά τις περιπτώσεις $a = 0$ και $a > 0$]

6. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ για $x < 2$ και $f(x) = 3 + x$ για $x \geq 2$.
(i) Υπολογίστε τα πλευρικά όρια της f στο 2 και δείξτε ότι η f είναι ασυνεχής στο σημείο 2.
(ii) Αποδείξτε ότι η f είναι ασυνεχής στο σημείο 2 χρησιμοποιώντας την αρχή της μεταφοράς.

7. Να εξεταστεί αν είναι αληθής ή ψευδής καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις (Αν είναι αληθής να την αποδείξετε, αν είναι ψευδής βρείτε κατάλληλο αντιπαράδειγμα). Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
(i) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής τότε η συνάρτηση $|f|$ είναι συνεχής.
(ii) Αν η συνάρτηση $|f|$ είναι συνεχής τότε η συνάρτηση f είναι συνεχής.
(iii) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής τότε η συνάρτηση f^2 είναι συνεχής.
(iv) Αν η συνάρτηση f^2 είναι συνεχής τότε η συνάρτηση f είναι συνεχής.
(v) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ασυνεχείς παντού, τότε η $f + g$ είναι ασυνεχής.
(vi) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ασυνεχείς παντού, τότε η fg είναι ασυνεχής.
(vii) Αν $\lim_{x\to 0} f(x) = L$ τότε $\lim_{x\to 0} f(x^2) = L$.
(viii) Αν $\lim_{x\to 0} f(x^2) = \ell$ τότε $\lim_{x\to 0} f(x) = \ell$.

8. Αποδείξτε ότι αν $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ και $|g(x)| \leq M$ για κάθε x, τότε $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$

9. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση με $f(x) \in \mathbb{Q}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

10. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι φθίνουσα και συνεχής. Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in \mathbb{R}$ ώστε $f(\xi) = \xi$.

11. Έστω $f, g : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχείς ώστε $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\theta > 0$ με $\theta \in \mathbb{Q}$ ώστε $f(x) > g(x) + \theta$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.